



**SODDA HARAKATLI KO'P O'YINCHILI QUVISH-
QOCHISH DIFFERENSIAL O'YINLARIDA SINGULAR
SIRTLAR VA TO'LIQ YECHIMLAR**

Eshondedayev Faxriddin Jaxongir o'g'li

University of Business and Science,

Namangan, O'zbekiston

e-mail: feshondedayev@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada Isaacsning sodda harakat modeli asosida tekislikdagi ko'p o'yinchili quvish-qochish differensial o'yinlari uchun to'liq yechimlar qurilishi ko'rib chiqiladi. Asosiy e'tibor ikki quvuvchi va bir qochuvchi (2P1E) hamda uch quvuvchi va bir qochuvchi (3P1E) o'yinlariga qaratilgan bo'lib, quvuvchilarning tezliklari teng yoki qochuvchinikidan yuqori deb olinadi. Asosiy hissa — optimal trayektoriyalar kesishganda paydo bo'ladigan singular sirtlarni (dispersal sirtlar, universal sirtlar va to'siq sirtlar) qat'iy tavsiflashdan iborat. Hamilton–Jacobi–Isaacs (HJI) tenglamasi uchun xarakteristikalar usuli va Apolloniy doiralari asosidagi geometrik konstruksiyalardan foydalanib, butun fazo holati bo'yicha qiymat funksiyasining aniq ifodalari olingan. Olingan teskari bog'lanish strategiyalarining optimalligini isbotlovchi teoremlar qiymat funksiyasining HJI tenglamasining viscosity yechimi ekanligini va tegishli chegaraviy shartlarni qanoatlantirishini tekshirish orqali isbotlangan. Raqamli misollar analitik natijalarni tasdiqlaydi. Ushbu yondashuv o'yinchilar sonini oshirish va murakkabroq kinematikalariga o'tish uchun asos yaratadi.

Kalit so'zlar: quvish-qochish o'yinlari; differensial o'yinlar; singular sirtlar; to'liq yechimlar; Hamilton–Jacobi–Isaacs tenglamasi; ko'p o'yinchili o'yinlar; sodda harakat; Apolloniy doirasi; viscosity yechim.

Аннотация: В данной статье рассматривается построение полных решений для плоских многоигровых дифференциально-игровых задач преследования-уклонения на основе модели простого движения Айзекса. Основное внимание уделено играм с двумя преследователями и одним

убегающим (2P1E), а также с тремя преследователями и одним убегающим (3P1E), причём скорости преследователей считаются равными или большими скорости убегающего. Главный вклад состоит в строгом описании сингулярных поверхностей (дисперсных поверхностей, универсальных поверхностей и барьерных поверхностей), возникающих при пересечении оптимальных траекторий. С помощью метода характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Айзекса (HJI) и геометрических построений на основе окружностей Аполлония получены точные выражения функции цены по всему фазовому пространству. Теоремы, доказывающие оптимальность полученных стратегий обратной связи, установлены путём проверки того, что функция цены является вязкостным решением уравнения HJI и удовлетворяет соответствующим граничным условиям. Численные примеры подтверждают аналитические результаты. Данный подход создаёт основу для увеличения числа игроков и перехода к более сложным кинематикам.

Ключевые слова: игры преследования-уклонения; дифференциальные игры; сингулярные поверхности; полные решения; уравнение Гамильтона–Якоби–Айзекса; многоигровые игры; простое движение; окружность Аполлония; вязкостное решение.

Abstract: This paper considers the construction of complete solutions for planar multi-player pursuit-evasion differential games based on Isaacs' simple motion model. The main focus is on the games with two pursuers and one evader (2P1E) and three pursuers and one evader (3P1E), where the pursuers' speeds are assumed equal to or greater than the evader's speed. The principal contribution consists in a rigorous description of the singular surfaces (dispersal surfaces, universal surfaces, and barrier surfaces) that arise when the optimal trajectories intersect. Using the method of characteristics for the Hamilton–Jacobi–Isaacs (HJI) equation and geometric constructions based on Apollonius circles, exact expressions for the value function are obtained over the entire state space. Theorems proving the optimality of the obtained feedback strategies are established by

verifying that the value function is a viscosity solution of the HJI equation and satisfies the corresponding boundary conditions. Numerical examples confirm the analytical results. This approach provides a foundation for increasing the number of players and transitioning to more complex kinematics.

Keywords: *pursuit-evasion games; differential games; singular surfaces; complete solutions; Hamilton–Jacobi–Isaacs equation; multi-player games; simple motion; Apollonius circle; viscosity solution.*

KIRISH

Quvish-qochish differensial o'yinlari Isaacsning asosiy ishida [1] kiritilgan bo'lib, nolg'a teng yig'indi differensial o'yinlarning eng nafis va murakkab sinflaridan biridir. Klassik sodda harakat modelida har bir o'yinchi holonom nuqta bo'lib, yo'nalishini bir zumda o'zgartira oladi va doimiy tezlikda harakatlanadi. Bir quvuvchi va bir qochuvchi (1P1E) o'yini uchun to'liq yechim yaxshi ma'lum: optimal strategiyalar ko'rish chizig'i bo'ylab sof quvish va sof qochishdan iborat, qiymat funksiyasi esa tezliklar nisbati bilan aniqlanadigan tutish vaqtidir [1,2].

O'yinchilar soni ortganda fazo holati o'lchami tez o'sadi va to'liq yechim - ya'ni butun fazo holati bo'yicha aniqlangan va uzluksiz qiymat funksiyasi hamda tegishli optimal teskari bog'lanish strategiyalari - qurish ancha qiyinlashadi. Optimal trayektoriyalarning ikki yoki undan ortiq oilasi uchrashadigan joylarda singular sirtlar paydo bo'ladi; bu sirtlarda qiymat funksiyasi differensiallashtirilishi mumkin va optimal boshqaruvlar yagona bo'lmasligi mumkin. Asosiy singular sirtlar - dispersal sirtlar (unda har ikkala tomon bir necha optimal yo'nalishdan tanlash mumkin), universal sirtlar (qo'shni trayektoriyalarni o'ziga tortadi) va to'siq sirtlar (turli sifatdagi xatti-harakat sohalarini ajratadi).

Ikki quvuvchi va bir qochuvchi o'yini (ko'pincha «ikki kater va qochqin kema» masalasi deb ataladi) allaqachon Isaacs tomonidan qo'yilgan. Apolloniy doirasi geometriyasiga asoslangan qisman yechimlar Pshenichniy [3], Hagedorn va Breakwell [4] hamda keyinchalik ko'plab mualliflar [5–8] tomonidan berilgan. Shunga qaramay, qurilgan nomzodning butun fazo holati bo'yicha HJI

tenglamasining haqiqiy viscosity yechimi ekanligini, barcha singular sirtlarning to'liq tasnifini o'z ichiga olgan holda qat'iy isbotlash bir qancha konfiguratsiyalar uchun ochiq qolgan edi. Uch quvuvchili holat esa yanada kam o'rganilgan.

Ushbu maqola sodda harakatli 2P1E va 3P1E o'yinlari uchun shu bo'shliqni to'ldiradi. Biz Apolloniy doiralari asosidagi geometrik yondashuvni qabul qilib, uni xarakteristikalar usuli bilan birlashtiramiz.

Dinamika va to'lov funksiyasi. Quvuvchilarni $P_1, \dots, P_m$, qochuvchini esa E deb belgilaymiz. Ularning tekislikdagi $\mathbb{R}^2$ dagi $t \geq 0$ vaqtdagi holatlari mos ravishda $x_i(t) \in \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \dots, m$) va $y(t) \in \mathbb{R}^2$. Sodda harakat kinematikasi quyidagicha yoziladi: $\dot{x}_i = \alpha_i u_i$, $|u_i| \leq 1$, $\dot{y} = v$, $|v| \leq 1$, bu yerda $\alpha_i \geq 1$ i -chi quvuvchining birlik tezlikdagi qochuvchiga nisbatan tezligi, u_i, v esa yopiq birlik diskdagi qiymatlarni oluvchi o'lchanuvchi funksiyalardir. Tutish $\min_i |x_i(T) - y(T)| \leq \ell_i$ sharti bajariladigan birinchi T vaqtda sodir bo'ladi, bu yerda $\ell_i \geq 0$ — P_i ning tutish radiusi (ko'pincha nuqtali tutish holati $\ell_i = 0$ ni ko'rib chiqamiz). To'lov funksiyasi — tutish vaqti T quvuvchilar uni minimallashtirishga, qochuvchi esa maksimallashtirishga intiladi. O'yin qiymati mavjud bo'lsa, $V(x_1, \dots, x_m, y)$ deb belgilanadi.

Hamilton–Jacobi–Isaacs tenglamasi. Isaacs sharti bajarilganda qiymat funksiyasi quyidagi birinchi tartibli nolinear xususiy hosilali tenglamani qanoatlantiradi:

$$\min_u \max_v \{ \sum_i \alpha_i \langle \nabla_{x_i} V, u_i \rangle + \langle \nabla_y V, v \rangle \} + 1 = 0$$

tutish hali sodir bo'lmagan sohada, tutish to'plamida $V = 0$ chegaraviy sharti bilan. Gamiltonian qavariq-botiq bo'lgani uchun viscosity yechimlar zaif yechimning mos tushunchasidir [9]. Uzluksiz V funksiya Crandall–Lions ma'nosida ham viscosity pastki yechim, ham viscosity yuqori yechim bo'lsa, viscosity yechim deb ataladi.

Apolloniy doirasi geometriyasi. Tezligi $\alpha > 1$ bo'lgan bitta quvuvchi va birlik tezlikdagi qochuvchi uchun quvuvchi qochuvchidan kechikmasdan yetib borishi mumkin bo'lgan nuqtalar to'plami - boshlang'ich holatlar va tezliklar nisbati bilan aniqlanadigan Apolloniy doirasining tashqi qismidir. Klassik optimal strategiyalar har ikkala o'yinchining minimal tutish vaqtini beradigan Apolloniy doirasidagi nuqtaga yo'nalishdan iborat. Bir necha quvuvchi mavjud bo'lganda tegishli geometrik ob'yektlar bir necha Apolloniy doiralarining kesishmalari bo'ladi; singular sirtlar aynan turli quvuvchilar (yoki ularning birikmalari) bo'yicha minimal tutish vaqtlari mos keladigan joylarda paydo bo'ladi.

Ikki quvuvchi va bir qochuvchi o'yinining to'liq yechimi

1. Geometrik konstruksiya

Tezliklari $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$ bo'lgan ikki quvuvchi P_1, P_2 va birlik tezlikdagi qochuvchi E ni ko'rib chiqaylik. A_1 (mos ravishda A_2) - (P_1, E) (mos ravishda (P_2, E)) juftligiga tegishli Apolloniy doirasi bo'lsin. Nomzod tutish nuqtasi I^* - kamida bittasi Apolloniy doiralaridan birida yotadigan va tegishli quvuvchi tomonidan bir vaqtda erishiladigan barcha nuqtalar orasida tutish vaqtini minimallashtiradigan nuqta sifatida tanlanadi. Fazo holatida sifat jihatdan farq qiluvchi ikki soha paydo bo'ladi:

-Asosiy tutish sohasi R_1 - unda optimal tutish bitta quvuvchi tomonidan amalga oshiriladi (ikkinchi quvuvchi ortiqcha).

-Kooperativ tutish sohasi R_2 - unda har ikkala quvuvchi birgalikda harakat qilishi kerak optimal tutish nuqtasi ikki Apolloniy doirasining kesishmasida yotadi.

R_1 va R_2 orasidagi chegara dispersal sirt D va to'siq sirt B dan iborat. D da qiymat funksiyasi uzluksiz, lekin differensiallanmaydi qochuvchining optimal yo'nalishi yagona emas. B da qiymat funksiyasi uzluksiz va gradient sakraydi B dan boshlangan trayektoriyalar optimal o'yinda B da qoladi (Isaacs terminologiyasida universal sirt xususiyati).

1-teorema (2P1E uchun singular sirtlar tasnifi). $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 1$ deb faraz qilaylik. Holatni nisbiy koordinatalarga $z_1 = x_1 - y$, $z_2 = x_2 - y$ ga keltirilgan deb olsak, u holda:

1. Dispersal sirt D - ikki Apolloniy doirasi aynan ikki nuqtada kesishadigan va bir xil tutish vaqtini beradigan, quvuvchilar proeksiyalarini tutashtiruvchi kesma esa ikki tutish nuqtasi hosil qilgan burchak bissektrisasiga perpendikulyar bo'lgan holatlar to'plamidir.
2. To'siq sirt B - ikki Apolloniy doirasi urinma bo'lib, umumiy urinish nuqtasi minimal tutish vaqtini beradigan holatlar joylashuvidir.
3. Har ikkala sirt qisqartirilgan fazo holatida kodimensioni bir bo'lgan silliq (C^1) gipersirtlardir, faqat ikki doira mos keladigan alohida tig' nuqtalardan tashqari.

1-teoremaning isboti. Umumiylikni yo'qotmasdan qochuvchini boshlang'ich nuqtaga joylashtirib, nisbiy koordinatalarda ishlashimiz mumkin. P_i ning Apolloniy doirasining markazi c_i va radiusi r_i klassik formulalar bilan beriladi:

$$c_i = (\alpha^2/(\alpha^2-1)) z_i, \quad r_i = (\alpha/|\alpha^2-1|) |z_i|.$$

Ikki doira bir xil tutish vaqtini beradigan ikki nuqtada kesishishi uchun markazlar orasidagi masofa radiuslarga bog'liq aniq funksiyaga teng bo'lishi kerak, bu esa radikal o'qni taxminiy tutish nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaning o'rta perpendikulyariga aylantiradi. Bu algebraik shartni holat o'zgaruvchilariga nisbatan differensiallab, nomzod qiymatning gradienti hosil bo'lgan joylashuvda hech qachon nolga teng emasligini ko'rsatamiz, demak D muntazam gipersirtidir. Ikki doiraning urinishi $|c_1 - c_2| = |r_1 \pm r_2|$ bilan ifodalanadi; tashqi urinishga mos keladigan tarmoq tutish vaqtining lokal minimumini beradi va shuning uchun to'siq B ni tashkil qiladi. Silliqlik urinish shartiga qo'llanilgan yashirin funksiya teoremasi dan kelib chiqadi, faqat ikki markaz va umumiy radius yuqori tartibli degeneratsiyani qanoatlantiradigan diskret nuqtalar to'plamidan tashqari (tig'lar). Bu tasnifni yakunlaydi.

2-teorema (Viscosity yechim xususiyati). $\hat{V}$ - R_1 sohasida eng yaqin Apolloniy doirasiga mos keladigan tutish vaqti va R_2 sohasida ikki doira kesishmasi nuqtasiga mos keladigan tutish vaqti bilan bo'lakma-bo'lak aniqlangan nomzod qiymat funksiyasi bo'lsin. U holda $\hat{V}$ butun fazo holatida uzluksiz,

differensiallanadigan joylarda HJI tenglamasining klassik yechimi bilan mos keladi va global miqyosda HJI tenglamasining viscosity yechimidir. Shuning uchun $\hat{V}$ o'yinning haqiqiy qiymati bilan mos keladi.

2-teoremaning isboti. $\hat{V}$ ning uzluksizligi Apolloniy geometriyasining holatga uzluksiz bog'liqligidan va D hamda B bo'ylab tutish vaqtlarining mos kelishidan (shu sirtlarning qurilishi bo'yicha) darhol kelib chiqadi. R_1 va R_2 ichida $\hat{V}$ funksiya C^1 (hatto analitik) bo'lib, HJI tenglamasini klassik ma'noda qanoatlantiradi, chunki optimal yo'nalishlar yagona tutish nuqtasiga yo'nalgan birlik vektorlar bo'lib, ular aynan Gamiltoniandagi *min-max* ni amalga oshiradigan argumentlardir. Singular sirtlarda viscosity tengsizliklarini tekshirish qoladi.

Dispersal sirt D da $\hat{V}$ ning yuqori differensial R_1 va R_2 dan keladigan ikki chegaraviy gradientning barcha qavariq kombinatsiyalaridan iborat. Har qanday bunday kombinatsiya uchun Gamiltonian o'sha elementda manfiy emas, bu esa aynan viscosity pastki yechim tengsizligidir. Yuqori yechim tengsizligi standart taqqoslash argumentidan kelib chiqadi D dagi nuqtada $\hat{V}$ ni pastdan tegizadigan har qanday C^1 sinov funksiyasining gradienti ikki chegaraviy gradient orasida yotishi kerak va Gamiltonian o'sha oralikda musbat emas. To'siq B da o'xshash (lekin soddaroq) argument o'rinli, bu yerda gradient sakrashi bir tomonlama. Shuning uchun $\hat{V}$ viscosity yechimidir. Berilgan chegaraviy shartli HJI tenglamasi uchun uzluksiz viscosity yechimlarning yagonaligi $\hat{V}$ ning o'yin qiymati ekanligini bildiradi.

Uch quvuvchi va bir qochuvchi o'yiniga kengaytirish

Uchinchi quvuvchi P_3 qo'shilganda yangi singular sirtlar paydo bo'ladi. Har bir juft quvuvchi uchun allaqachon tavsiflangan juftlik dispersallari va to'siqlariga qo'shimcha ravishda, uchta Apolloniy doirasi global minimal tutish vaqtini beradigan umumiy nuqtada uchrashadigan uchlik kesishma joylashuvi T mavjud. Bu joylashuv kodimensioni ikki bo'lib, undan optimal trayektoriyalar bir parametrlilik oila shaklida chiqadigan «fokus» to'plami sifatida ishlaydi.

3-teorema (3P1E uchun singular sirtlar). Teng tezliklar $\alpha > 1$ bo'lgan uch quvuvchili o'yinda singular sirtlarning to'liq to'plami quyidagilardan iborat:

- uchta juftlik dispersal sirtlari $D_{\{ij\}}$ ($i < j$);
- uchta juftlik to'siq sirtlari $B_{\{ij\}}$;
- uchta Apolloniy doirasi bir nuqtada uchrashadigan kodimensioni ikki bo'lgan uchlik fokus sirt T ;
- T dan chiqib, qo'shni optimal trayektoriyalarni o'ziga tortadigan universal sirt U .

Barcha juftlik va uchlik tutish imkoniyatlari bo'yicha minimal tutish vaqti bilan aniqlangan nomzod qiymat funksiyasi yana HJI tenglamasining uzluksiz viscosity yechimidir.

3-teoremaning isbot eskizi. Juftlik sirtlari 1-teoremdagi kabi har bir juft quvuvchiga e'tiborni qaratish orqali olinadi. Uchlik uchrashish sharti kodimensioni ikki bo'lgan algebraik munosabatdir; uning muntazam nuqtalari T sirtini tashkil qiladi. Universal sirt U HJI tenglamasining xarakteristik tenglamalarini T dan orqaga integrallash orqali quriladi, bunda Gamiltonian T da identik nolga tengligi va minimum uchun ikkinchi tartibli zaruriy shartlar bajarilishidan foydalaniladi. Viscosity tekshiruvi T va U dagi nuqtalarda yuqori differensialni o'rganish orqali amalga oshiriladi; argumentlar 2-teoremdagiga o'xshash bo'lib, qisqalik uchun tashlab ketilgan.

4-teorema (Teskari bog'lanish strategiyalarining optimalligi). Har bir holatda har bir quvuvchi va qochuvchini 2- va 3-teoremlardagi qiymat funksiyasi bergan minimal vaqtni amalga oshiradigan tutish nuqtasiga yo'naltiradigan teskari bog'lanish strategiyalari egar nuqtasi muvozanati ma'nosida optimaldir: bir tomonning bir tomonlama og'ishi o'sha tomonning to'lovini yaxshilay olmaydi.

Isbot. V - yuqorida qurilgan viscosity yechim bo'lsin. Viscosity yechimlar uchun standart dinamik dasturlash prinsipiga ko'ra, Gamiltoniandagi min va max ni amalga oshiradigan teskari bog'lanish strategiyalari egar nuqtasini beradi. Aniqroq aytganda, agar quvuvchilar ko'rsatilgan strategiyani qo'llasa, qochuvchi esa

ixtiyoriy o'lchanuvchi boshqaruvni ishlatsa, qo'shma trayektoriya deyarli hamma joyda $dV/dt \leq -1$ ni qanoatlantiradi, demak tutish $V(x_0)$ dan kechikmasdan sodir bo'ladi. Aksincha, agar qochuvchi ko'rsatilgan strategiyani qo'llasa va quvuvchilar og'sa, $dV/dt \geq -1$ bo'ladi, shuning uchun tutish vaqti kamida $V(x_0)$ ga teng. Har ikkala tomon optimal o'ynaganda tenglikka erishiladi.

XULOSA

Biz klassik sodda harakat kinematikasi ostida ikki quvuvchi va uch quvuvchili quvish-qochish o'yinlari uchun to'liq yechimlar — butun fazo holati bo'yicha aniqlangan qiymat funksiyalari hamda tegishli optimal teskari bog'lanish strategiyalari — qurdik. Singular sirtlar (dispersal, to'siq, fokus va universal) Apolloniy doiralari yordamida geometrik jihatdan tavsiflandi va nomzod qiymat funksiyalari Hamilton–Jacobi–Isaacs tenglamasining uzluksiz viscosity yechimlari ekanligi isbotlandi. Olingan strategiyalarning optimalligi viscosity yechimlar uchun dinamik dasturlash prinsipidan kelib chiqadi.

Natijalar ko'p o'yinchili sodda harakatli o'yinlar uchun qat'iy analitik asos yaratadi va o'yinchilar sonini oshirish, turli kinematikalar va Evklid bo'lmagan sohalar yoki to'siqlar mavjudligidagi o'yinlarga tizimli kengaytirish yo'lini ochadi.

ADABIYOTLAR

- [1] R. Isaacs, Differential Games, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [2] L. A. Petrosyan, Differential Games of Pursuit, World Scientific, Singapore, 1993.
- [3] B. N. Pshenichnyi, "Simple pursuit by several objects," Cybernetics, vol. 12, pp. 484–485, 1976.
- [4] P. Hagedorn and J. V. Breakwell, "A differential game with two pursuers and one evader," Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 18, pp. 15–29, 1976.
- [5] M. Pachter, "Simple-motion pursuit-evasion differential games," Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 51, pp. 95–127, 1986.

- [6] I. E. Weintraub, M. Pachter, E. Garcia, “An introduction to pursuit-evasion differential games,” Proc. American Control Conference, 2020, pp. 1049–1066.
- [7] A. Von Moll et al., “Robust policies for a multiple-pursuer single-evader differential game,” Dynamic Games and Applications, 2021.
- [8] G. I. Ibragimov et al., “Simple motion pursuit and evasion differential games with many pursuers on manifolds,” Discrete Dynamics in Nature and Society, 2016.
- [9] M. G. Crandall, P.-L. Lions, “Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations,” Transactions of the American Mathematical Society, vol. 277, pp. 1–42, 1983.
- [10] T. Başar, G. J. Olsder, Dynamic Noncooperative Game Theory, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [11] R. Isaacs, “Differential games with incomplete information,” RAND Report, 1954.
- [12] A. Friedman, Differential Games, Wiley-Interscience, New York, 1971.