

ILDIZLARNI TOPISH VA TENGLAMALARNI YECHISH

Abduvaxobova Charos Sherzodovna,

TDTrU, "Qurilish muhandisligi" fakulteti, 60540200-Amaliy matematika
ta'lim yo'nalishi 1-kurs talabasi,

Ilmiy rahbar: **Eshmamatova Difuza Baxromovna**, TDTrU, DSc
24dil@mail.ru

Annotatsiya: Mazkur mavzu tenglamalarning ildizlarini (yechimlarini) aniqlash usullariga bag'ishlanadi. Algebraik, transendental va boshqa turdagi tenglamalarni yechishda analitik, grafigik va sonli metodlar qo'llaniladi. Aniq yechim topish qiyin bo'lgan hollarda Nyuton-Rafson, bisection kabi usullar yordamida ildizlarni taxminiy aniqlash mumkin. Bu mavzu matematik analiz, ilmiy hisoblashlar va muhandislikda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: Tenglama ildizlari, analitik usullar, sonli usullar, Nyuton-Rafson usuli, matematik analiz

Abstract: This topic is dedicated to methods for finding roots (solutions) of equations. Algebraic, transcendental, and other types of equations are solved using analytical, graphical, and numerical methods. When it is difficult to find exact solutions, approximate roots can be determined using methods such as Newton-Raphson and bisection. This topic plays an important role in mathematical analysis, scientific computing, and engineering.

Keywords: Equation roots, analytical methods, numerical methods, Newton-Raphson method, mathematical analysis

Matematikada tenglamalar yechimlarini, ya'ni ildizlarini topish muhim vazifalardan biridir. Tenglama ildizi – bu tenglamani qanoatlantiruvchi qiymat yoki qiymatlar to'plami. Turli sohalarda, jumladan fizika, muhandislik va iqtisodiyotda matematik modellashtirishda tenglamalarni yechish zarurati yuzaga keladi. Ildizlarni topish uchun analitik usullar, grafigik ko'rsatmalar hamda sonli (taxminiy)

metodlar qo‘llaniladi. Ba’zi hollarda aniq yechim topish qiyin bo‘lgani sababli, Nyuton-Rafson, bisection kabi sonli usullar keng tatbiq etiladi. Ushbu mavzu matematikani chuqurroq tushunish va amaliy masalalarni hal qilishda muhim o‘rin tutadi [1]-[4].

Tenglama ildizlari – tenglamani qanoatlantiruvchi yechimlar.

Analitik usullar - ildizlarni formularlar yordamida topish usullari.

Sonli usullar – taxminiy yechimlarni hisoblash usullari.

Nyuton- Rafson usuli – ildizlarni iterative ravishda topish.

Matematik analiz – limit, hosila va integral asosida matematik tahlil.

Keling bitta sodda savolga javob izlaylik?

Qanday qilib aniq $\sqrt{7}$ ning qiymatini topish mumkin? Ishonchingiz komil bo‘lsin, eng oddiy usul qadimiy Bobilaliklarga borib taqaladi va oddiy itertsiyani o‘z ichiga oladi. Biz $\sqrt{7}$ uchun boshlang‘ich taxmin x_0 ni olamiz. Faraz qilamizki, x_0 musbat son. Endi, ehtimol $x_0 \neq \sqrt{7}$, shuning uchun biz ushbu taxmin asosida yangi va yaxshiroq taxmin x_1 ni hosil qilamiz. Bu usul quyidagicha:

agar $x_0 \neq \sqrt{7}$ bo‘lsa, unda $x_0 < \sqrt{7}$ yoki $x_0 > \sqrt{7}$.

Birinchi holatda, ya’ni $x_0 < \sqrt{7}$ bo‘lsa, quyidagilar yuz beradi:

$$\sqrt{7} \cdot x_0 < 7$$

$$\sqrt{7} < \frac{7}{x_0}$$

$x_0 \neq 0$ uchun bu tenglik to‘g‘ri bo‘ladi.

Agar $x_0 > \sqrt{7}$ bo‘lsa, unda:

$$\sqrt{7} > \frac{7}{x_0}$$

Demak, quyidagi holatlardan biri yuz beradi:

$$x_0 < \sqrt{7} < \frac{7}{x_0}$$

yoki

$$\frac{7}{x_0} < \sqrt{7} < x_0$$

Shunday qilib, $\sqrt{7}$ x_0 va $\frac{7}{x_0}$ orasida joylashgan. Demak, x_0 va $\frac{7}{x_0}$ ning o‘rtanchasini olaylik:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{7}{x_0} \right)$$

Hosil bo‘lgan qiymat x_0 va $\frac{7}{x_0}$ orasida joylashadi va umid qilamizki, $\sqrt{7}$ ga yanada yaxshi yaqinlashadi. Shuning uchun bu qiymatni $\sqrt{7}$ uchun keying „taxmin“ sifatida ishlatamiz. Davom ettirib, biz katma-ket o‘rtachalarni hosil qilamiz:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{7}{x_1} \right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{7}{x_2} \right)$$

...

Intuitsiyaga ko‘ra, $x_0, x_1, x_2, \dots$ ketma-ketligi nihoyat $\sqrt{7}$ ga yaqinlashishi kerak. Keling, bu qanday ishlashini ishlashini amaliyotda ko‘raylik. Faraz qilaylik, biz $\sqrt{7}$ uchun boshlang‘ich taxmin sifatida, $x_0 = 1$ ni olamiz. Unda quyidagilar hosil bo‘ladi:

$$x_1 = \frac{1}{2} (1 + 7) = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{7}{4} \right) = \frac{1}{2} * \frac{23}{4} = \frac{23}{8} = 2,8750000000$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(2.875 + \frac{7}{2.875} \right) = \frac{1}{2} (2.875 + 2.4347826087) = 2.6548913043$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (2.6548913043 + 2.6365261504) = 2.6457087274$$

$$x_5 = \frac{1}{2} (2.6457087274 + 2.6452569887) = 2.6454828580$$

$$x_6 = \frac{1}{2} (2.6454828580 + 2.6454866894) = 2.6454847737$$

$$x_7 = \frac{1}{2} (2.6454847737 + 2.6454847716) = 2.6454847727$$

va biz ko‘ramizki, bu ketma-ketlik juda tez to‘g‘ri javobga yaqinlashadi, chunki $\sqrt{7} = 2.645484\dots$

Aniqki, boshqa kvadrat ildizlarni topish uchun, boshlang'ich taxmindagi formuladagi 7 ni o'zgartirishimiz kifoya. Shunday qilib, $\sqrt{9}$ ni topish uchun, dastlabki taxmin sifatida masalan $x_0 = 2$ ni tanlaymiz, so'ngra:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{9}{2} \right) = 3.25,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{9}{x_1} \right) = 3.0096\dots,$$

$$x_3 = 3.000015\dots,$$

$$x_4 = 3.000000\dots,$$

$$x_5 = 3.000000\dots,$$

natijada bu ketma-ketlik juda tez $\sqrt{9} = 3$ ga yaqinlashadi.

Endi bu savolni umumiyashtiramiz, ya'ni: $F(x) = 0$ tenglamani qanday yechish mumkin? Masalan, 7 ning kvadrat ildizini topish $x^2 - 7 = 0$ tenglamasini yechishga ekvivalent. Bunday tenglamaning yechimlarini aniq ifodalash mumkin bo'lgan funksiyalar juda kam uchraydi. Hatto polinomlar uchun ham, darajasi 2 dan katta bo'lsa, bu mumkin emas. Ammo bu muammo juda muhimligi sababli, boshqa usullarni izlashga harakat qilamiz. Hisoblash matematikasiga tanish bo'lgan usullardan biri – Nyuton usuli. Ushbu usul quyidagi jarayonni o'z ichiga oladi. Ildizlarini topmoqchi bo'lgan F funksiyasi berilganida, biz yangi funksiya – Nyuton iteratsiyasini hosil qilamiz, u quyidagicha ifodalanadi [2]:

$$N(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

So'ngra ildizga dastlabki taxmin x_0 olinadi. Nyuton usuli bu funksiya N ni ketma-ket qo'llashdan iborat:

$$x_1 = N(x_0), \quad x_2 = N(N(x_1)), \quad x_5 = N(N(N(x_0)))$$

va shu tariqa davom etadi. Aksariyat xollarda, ammo har doim emas, ushbu ketma-ketlik F funksiyasining ildiziga yaqinlashadi. Misol uchun, $F(x) = x^2 - 7$ (ildizlari $\pm\sqrt{7}$ bo'lgan) uchun Nyuton iteratsiyasi quyidagicha soddalashtiriladi:

$$N(x) = x - \frac{x^2-7}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right)$$

bu yuqorida ko'rib chiqilgan edi.

Ma'lumki [4], tenglamalarning ildizlarini topish muhim vazifa hisoblanadi. Aniq yechimlar bolmaganda, Nyuton-Rafson va bisection kabi usullar yordamida ildizlar taxminiy aniqlanadi. Ayniqsa, Nyuton usuli tez yaqinlashuv xususiyati bilan ajralib turadi. $\sqrt{7}$ kabi sonlar uchun bu usul qadimgi Bobil uslubini eslatadi va amaliyotda yuqori aniqlik beradi. Ushbu metodlar ilmiy hisoblash, muhandislik va boshqa fanlar uchun katta ahamiyatga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. **"Numerical Methods for Engineers"** – Steven C. Chapra va Raymond P. Canale
Bu kitobda sonli metodlar, jumladan, Nyuton-Rafson va bisection usullari muhandislik masalalariga qo'llanilishi batafsil yoritilgan.
2. **"Numerical Analysis"** – Richard L. Burden va J. Douglas Faires
Tenglama ildizlarini topish bo'yicha nazariy va amaliy yondashuvlar, shu jumladan, Nyuton-Rafson usuli, bu kitobda keng qamrab olingan.
3. **"Numerical Methods with Applications"** – Autar K. Kaw
Ushbu kitobda bisection va Nyuton-Rafson metodlari bo'yicha aolhida boblar mavjud bo'lib, ular nazariy tushunchalar va amaliy misollar bilan boyitilgan.
4. **"Solving Nonlinear Equations: Fundamentals, Algorithms, and Software"** – C.T. Kelley.
Bu asarda Nyuton-Rafson usulining algoritmlari va dasturiy ta'limoti haqida batafsil ma'lumotlar keltirilgan.